

TOMASZ MIKULSKI

RAMY CIENKOŚCIENNE  
MODELOWANIE  
I ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*monografie*

*100*

POLITECHNIKA GDAŃSKA

TOMASZ MIKULSKI

RAMY CIENKOŚCIENNE  
MODELOWANIE  
I ANALIZA WRAŻLIWOŚCI



GDAŃSK 2010

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Romuald Szymkiewicz*

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

*Janusz T. Cieśliński*

REDAKTOR SERII

*Jerzy M. Sawicki*

RECENZENCI

*Czesław Cichoń*

*Czesław Szymczak*

PROJEKT OKŁADKI

*Jolanta Cieślawska*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej  
Gdańsk 2010

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978–83–7348–293–7

# SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń .....	5
1. WSTĘP .....	7
1.1. Modele numeryczne ram cienkościennych .....	7
1.2. Analiza wrażliwości .....	12
1.3. Cel i zakres pracy .....	15
2. MODELOWANIE RAM CIENKOŚCIENNYCH .....	17
2.1. Prętowy element cienkościenny .....	20
2.2. Superelement węzła .....	23
2.3. Rola stężeń wewnętrznych węzła .....	28
2.4. Dobór rozmiarów superelementu węzła ramy .....	31
2.5. Przykłady numeryczne .....	32
2.5.1. Statyka – analiza porównawcza trzech modeli numerycznych .....	32
2.5.2. Statyka – dobór rozmiarów superelementu węzła .....	35
2.5.3. Statyka – rama płaska ze stężeniami .....	37
2.5.4. Statyka – rama hali .....	42
2.5.5. Dynamika – analiza porównawcza trzech modeli numerycznych .....	45
2.5.6. Dynamika – wpływ stężeń węzła .....	50
3. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI .....	54
3.1. Statyka .....	56
3.1.1. Układy prętowe – opis ciągły .....	56
3.1.2. Układy dyskretne .....	61
3.2. Dynamika .....	63
3.2.1. Analiza wrażliwości wartości własnych .....	63
3.2.2. Analiza wrażliwości postaci własnych .....	65
3.3. Przykłady numeryczne .....	67
3.3.1. Statyka – rama ze stężeniami poprzecznymi .....	68
3.3.2. Statyka – rama ze stężeniami na poziomie półki górnej .....	72
3.3.3. Statyka – rama – zmiana grubości półek .....	74
3.3.4. Analiza wrażliwości częstości drgań skrętnych belki cienkościennej .....	83
3.3.5. Analiza wrażliwości postaci drgań skrętnych belki cienkościennej .....	87
4. WRAŻLIWOŚĆ W UJĘCIU PROBABILISTYCZNYM .....	91
4.1. Probabilistyczna wrażliwość konstrukcji prętowych w stanie regularnym .....	92
4.1.1. Linearyzacja funkcji $\mathcal{S}$ .....	92
4.1.2. Zastosowanie metody Monte Carlo .....	94
4.2. Probabilistyczna wrażliwość stanów granicznych konstrukcji .....	94
4.2.1. System fundamentalny .....	94
4.2.1.1. Wrażliwość probabilistyczna stanów granicznych systemu w odniesieniu do efektu obciążenia ( $S$ ) .....	95
4.2.1.2. Wrażliwość probabilistyczna stanów granicznych systemu w odniesieniu do wytrzymałości ( $R$ ) .....	96
4.2.2. Metoda Monte Carlo – konstrukcje prętowe .....	96
4.3. Przykłady probabilistycznej wrażliwości konstrukcji .....	97
4.3.1. Belka dwuteowa – probabilistyczna analiza wrażliwości stanu regularnego .....	97

---

4.3.2. Rama cienkościenna – probabilistyczna analiza wrażliwości stanu granicznego .....	100
5. ZASTOSOWANIA ANALIZY WRAŻLIWOŚCI .....	104
5.1. Projektowanie .....	104
5.1.1. Weryfikacja projektu konstrukcji wieży obserwacyjnej .....	106
5.2. Diagnostyka .....	111
5.3. Identyfikacja parametryczna .....	111
5.3.1. Identyfikacja sztywności przepon w dwuteowym pręcie cienkościennym .....	113
5.4. Optymalizacja .....	117
6. WNIOSKI .....	119
BIBLIOGRAFIA .....	123
Streszczenie w języku polskim .....	128
Streszczenie w języku angielskim .....	130

## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- $A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta  
 $a$  – długość współpracująca superelementu  
 $\mathbf{B}$  – macierz kształtu superelementu  
 $B$  – bimoment  
 $\mathbf{b}$  – wektor zmiennych projektowych  
 $b$  – zmienna projektowa, szerokość półki  
 $C$  – macierz kowariancyjna  
 $E$  – moduł sprężystości, operacja wartości oczekiwanej  
 $F$  – podcałkowa funkcja wrażliwości  
 $\mathbf{f}$  – wektor funkcji kształtu elementu  
 $G$  – moduł ścinania, funkcja stanu granicznego  
 $J_0$  – biegunowy moment bezwładności przekroju  
 $J_d$  – moment bezwładności skręcania czystego Saint-Venanta  
 $J_\omega$  – wycinkowy moment bezwładności przekroju  
 $\mathbf{K}$  – macierz sztywności
- $k$  – współczynnik zanikania  $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$
- $\mathbf{K}_G$  – macierz geometryczna  
 $l$  – długość belki  
 $m$  – obciążenie równomiernie rozłożonym momentem skręcającym  
 $m_i$  – wartość oczekiwana (średnia)  
 $\mathbf{m}$  – wektor wartości oczekiwanych  
 $\mathbf{M}$  – macierz mas  
 $\bar{\mathbf{M}}$  – diagonalna macierz mas  
 $n$  – częstotliwość drgań własnych  
 $\mathbf{P}$  – wektor obciążenia  
 $P$  – ściskająca siła osiowa  
 $\mathbf{q}$  – wektor amplitud przemieszczeń
- $r_0$  – biegunowy promień bezwładności  $r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$
- $R$  – zmienna losowa – nośność, wytrzymałość przekroju  
 $\mathcal{S}$  – zmienna stanu  
 $S$  – zmienna losowa – efekt obciążenia  
 $T$  – energia kinetyczna  
 $U$  – energia potencjalna  
 $\mathbf{u}$  – wektor przemieszczeń  
 $\mathbf{w}_s$  – wektor wrażliwości pierwszego rzędu zmiennej stanu  $\mathcal{S}$   
 $\alpha$  – współczynnik wagowy zmiennej stanu w zagadnieniu identyfikacji  
 $\beta$  – współczynnik korekcyjny modułu sprężystości  
 $\chi$  – spaczenie  $\chi = -\theta'$   
 $\varepsilon$  – dokładność obliczeń  
 $\kappa$  – stała ścinania przekroju poprzecznego  
 $\delta(\cdot)$  – delta Diraca

- $\eta$  – wektor przemieszczeń układu sprzężonego
- $\lambda$  – wartość własna  $\lambda = \omega^2$
- $\lambda_s$  – mnożnik – bezwymiarowa zmienna losowa w odniesieniu do efektu obciążenia
- $\lambda_r$  – mnożnik – bezwymiarowa zmienna losowa w odniesieniu do wytrzymałości
- $\lambda_p$  – mnożnik obciążenia – bezwymiarowa zmienna losowa
- $\nu$  – współczynnik Poissona
- $\theta$  – kąt skręcenia
- $\rho$  – masa właściwa
- $\sigma_s$  – odchylenie standardowe zmiennej  $\mathcal{S}$
- $\omega$  – częstość drgań własnych
- $\zeta$  – wskaźnik przekazywania się bimomentów w węźle